

Christina ROECKERATH

## **Wechselwirkung von Populationen in einem begrenzten Lebensraum Modellierung, Simulation und mathematische Analyse im Unterricht**

Die Notwendigkeit von Modellierung im Mathematikunterricht ist in der fachdidaktischen Diskussion unumstritten. Dennoch besteht zurzeit noch ein großer Mangel an geeignetem Unterrichtsmaterial.

Im Rahmen des Vortrags wird ein Modell aus der Biologie vorgestellt, das für Schülerinnen und Schüler zugänglich ist ohne dabei auf Authentizität und Relevanz zu verzichten. Es handelt sich um ein dynamisches, computergestütztes Simulationswerkzeug, das auf der Basis eines einfachen Konzeptmodells die Entwicklung von Populationen abbildet und die Herleitung einer mathematischen Beschreibung ermöglicht. Es kann somit sowohl im Biologie- als auch im Mathematikunterricht eingesetzt werden.

### **Das reale System**

Betrachtet werden zwei Arten, die einen gemeinsamen, beschränkten Lebensraum bewohnen. Die Individuen einer Art treten untereinander und zu Individuen der anderen Art in Wechselwirkung. Diese Phänomene bezeichnet man als intra- bzw. interspezifische Wechselbeziehungen. Beispiele dafür sind Konkurrenzverhalten um Ressourcen oder Lebensraum, wie es bei Nahrungskonkurrenz und Revierverhalten der Fall ist. Die Interaktion zwischen den Arten kann hemmend oder fördernd auf das jeweilige Wachstum wirken, wie es bei Räuber-Beute oder symbiotischen Systemen der Fall ist. Wesentlich ist, dass die intra- und interspezifischen Wechselbeziehungen und die Beschaffenheit des Lebensraumes die Entwicklung der einzelnen Arten bestimmen.

### **Vom realen System zum Konzeptmodell**

Wir wählen ein einfaches Konzeptmodell, das durchaus auch für Schüler unterer Jahrgangstufen nachvollziehbar ist. Der Lebensraum wird auf ein Feld mit einer festen Anzahl von Kästchen abgebildet. Jedes Kästchen steht für einen klar abgrenzbaren Bereich des Lebensraumes und der darin vorhandenen Nahrungsressourcen. Jedes Individuum, welches sich in einem solchen Bereich des Lebensraums befindet, wird im Modell durch einen je nach Spezies gefärbten Punkt im entsprechenden Kästchen

dargestellt. Die Bereiche sind so gewählt, dass Individuen, die sich gemeinsam in einem Bereich befinden, interagieren.

Wir betrachten hier die Entwicklung der beiden Arten von Generation zu Generation. Dazu wird die Entwicklung des realen Systems auf diskrete Zeitpunkte abgebildet. Zur Vereinfachung nehmen wir eine separierte Generationenabfolge an, wie sie bei einjährigen Pflanzen und Insekten zu beobachten ist.

### Vom Konzeptmodell zum stochastischen Modell

Zur Realisierung des Konzeptmodells als stochastischer Prozess wurde ein computergestütztes Werkzeug entwickelt, das Basistool, mit dem die Schüler die Wechselbeziehungen selbstständig modellieren können.

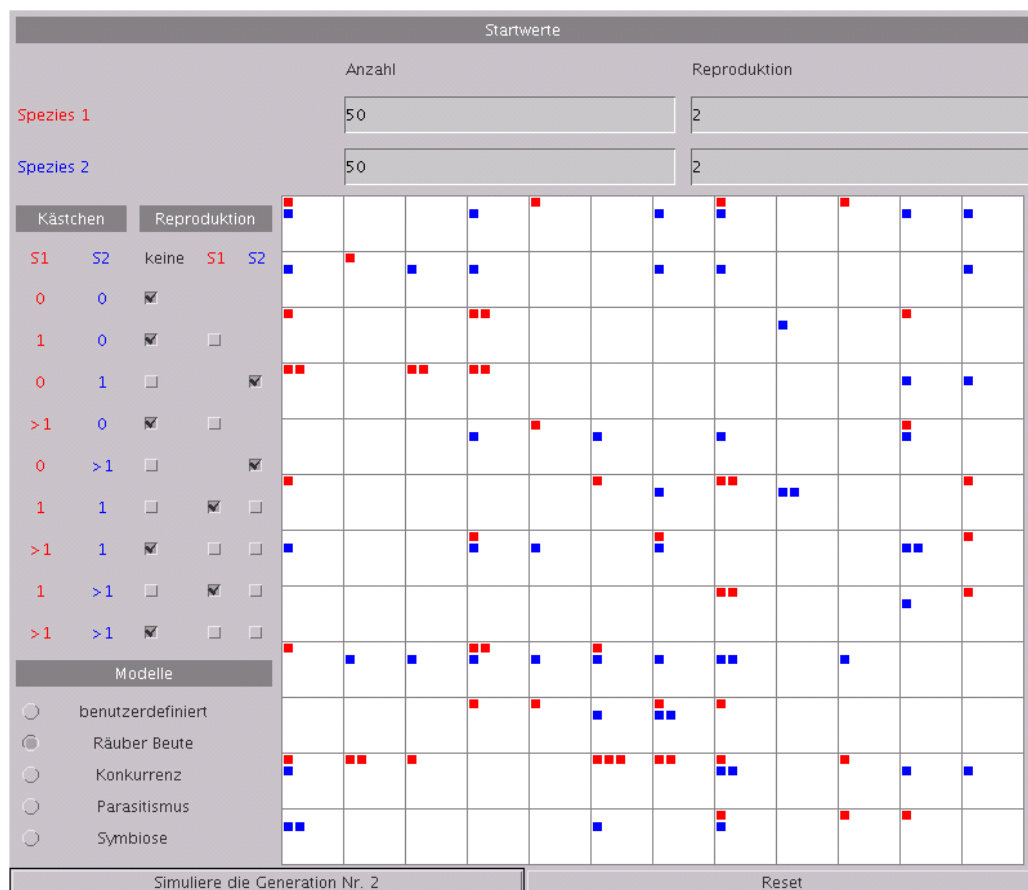


Abbildung 1: Das Basistool

In Abbildung 1 ist die graphische Oberfläche des Basistools dargestellt. Im oberen Bereich können die Schüler die Startgröße der Populationen und die jeweilige Anzahl der direkten Nachkommen eines reproduktionsfähigen Individuums eingeben. Im linken Teil kann die intra- und interspezifische Wechselbeziehung der Arten festgelegt werden. Vordefiniert sind Räuber-

Beute-, Konkurrenz-, Parasitismus- und Symbiose-Beziehungen. Wie in Abbildung 1 dargestellt, wird beim Starten der Simulation die eingegebene Anzahl an Individuen zufällig auf dem Feld verteilt. Das Programm wertet die Situation kästchenweise entsprechend der durch die Schüler festgelegten Wechselbeziehung aus und bestimmt somit die Individuenanzahlen der beiden Arten für die nächste Generation.

In Abbildung 1 wird exemplarisch die Simulation einer Räuber-Beute-Beziehung dargestellt. Die Art, in der die Wechselbeziehung festgelegt wurde, ist im linken Bereich ablesbar. Die in rot dargestellte Spezies 1 steht für die räuberische Population. Die Beutetiere werden durch die blau dargestellte Spezies 2 abgebildet. Ein Räuber braucht Beute, um nicht zu sterben und sich reproduzieren zu können. Beutetiere können sich nur reproduzieren, wenn kein Räuber sie frisst. Pro Kästchen sind dabei allerdings nur genug Nahrungsressourcen für die Reproduktion eines Beutetiers vorhanden. Befinden sich mehrere Räuber in einem Kästchen, so löst das aufgrund von Revierverhalten Stress bei den Tieren aus, sodass keine Reproduktion stattfindet.

### **Vom stochastischen zum deterministischen Modell**

Das Basistool bietet eine Grundlage, um auf für Schüler gut verständliche Weise eine mathematische Beschreibung für den simulierten Prozess zu entwickeln. Die Anzahlen der Individuen zum Zeitpunkt  $t$  seien mit  $S_1(t)$  und  $S_2(t)$  bezeichnet. Aufgrund der separierten Generationenabfolge, hängt die Änderung der Individuenanzahlen vom Zeitschritt  $t$  zum Zeitschritt  $t+1$  ausschließlich von der Reproduktion ab. Die Reproduktionsfunktionen  $R_1(S_1, S_2)$  und  $R_2(S_1, S_2)$  geben an, wie viele Individuen reproduktionsfähig sind, wenn sich  $S_1$  Individuen der einen und  $S_2$  Individuen der anderen Spezies zufällig auf dem Feld verteilen. Die Anzahl der Nachkommen je reproduktionsfähigem Individuum seinen durch  $r_1$  für die Spezies 1 und  $r_2$  für die Spezies 2 angegeben. Die Individuenanzahlen der einzelnen Spezies zum Zeitpunkt  $t+1$  ergeben sich aus deren Reproduktion zum Zeitpunkt  $t$ . Mit den Reproduktionsfunktionen kann eine mathematische Beschreibung der Entwicklung der beiden Arten durch die Differenzengleichungen

$$S_1(t+1) = r_1 R_1(S_1(t), S_2(t))$$

$$S_2(t+1) = r_2 R_2(S_1(t), S_2(t))$$

angegeben werden.

Eine für Schüler nachvollziehbare Herleitung der Reproduktionsfunktion

kann auf dem Wege der Simulation durchgeführt werden. Dazu wurde ein weiteres computergestütztes Werkzeug entwickelt, welches für eine Spezies die Simulation der Reproduktionen bei einer festen Individuenanzahl der einen Spezies und einer variablen Individuenanzahl der anderen Spezies durchführt und die resultierende Anzahl an reproduktionsfähigen Individuen in einem Koordinatensystem darstellt. Die entstehenden Graphen nähern die Reproduktionsfunktionen an. Schüler können hier mit diversen bekannten Ansätzen eine passende Funktion finden. Auf einem eher universitären Niveau lässt sich eine Herleitung der Reproduktionsfunktion mit Mitteln der Stochastik durchführen.

### **Prognosen für das reale System durch die Modelle**

Ein gutes Modell liefert Prognosen für das modellierte reale System.

Viele Bi-Systeme entwickeln sich bei unveränderten äußeren Einflüssen im Verlaufe der Zeit über verschiedene Stadien hin zu einem relativ stabilen Endzustand, dem Klimaxstadium.

Das entwickelte Modell bildet diese Phänomene der Realität ab. Zur besseren Anschauung dieser Tatsache dient das Langzeittool, welches die Entwicklung der Arten über einen längeren Zeitraum darstellt. Für jede Generation wird die aus der Simulation resultierende Individuenanzahl der Spezies als Punkt in ein Koordinatensystem eingetragen. Dies liefert eine anschauliche Darstellung der Langzeitentwicklung der beiden Arten.

Neben dem Langzeittool können Schüler die selbstentwickelte mathematische Beschreibung zur Herleitung von Aussagen über das reale System nutzen. Zum Beispiel weisen mittels Grenzwertbetrachtungen erhaltene Annäherungen an stationäre oder periodische Punkte auf Klimaxstadien hin.

### **Einsatz im Unterricht**

Die vorgestellten Modellierungswerkzeuge lassen sich vielfältig im Mathematik- und auch im Biologieunterricht einsetzen. Sie stellen fächerübergreifendes, anwendungsbezogenes Unterrichtsmaterial dar, das - je nachdem wie weit in die mathematische Analyse eingedrungen wird - in sämtlichen Jahrgangstufen des Gymnasiums wie auch an der Universität sinnstiftend und altersgemäß eingesetzt werden kann.